

ACERTE!

Cursos para o ENEM e Vestibulares



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA PLANA E FUNÇÕES



SALINHA
DE MATEMÁTICA
DO GUGUINHA

AULA 10

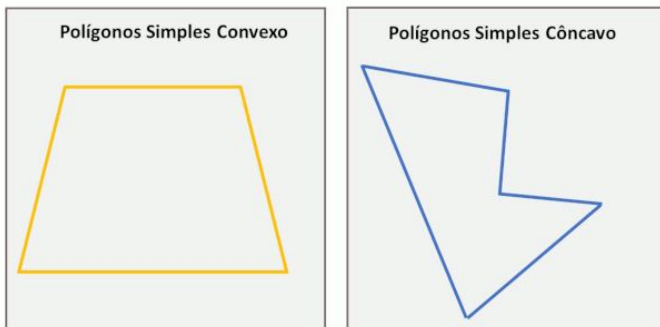
POLÍGONOS

Definição: Os polígonos são figuras planas e fechadas constituídas por segmentos de reta. A palavra “polígono” advém do grego e constitui a união de dois termos “poly” e “gon” que significa “muitos ângulos”.

Polígono convexo e côncavo

A junção das retas que formam os lados de um polígono com o seu interior é chamada de região poligonal. Essa região pode ser convexa ou côncava.

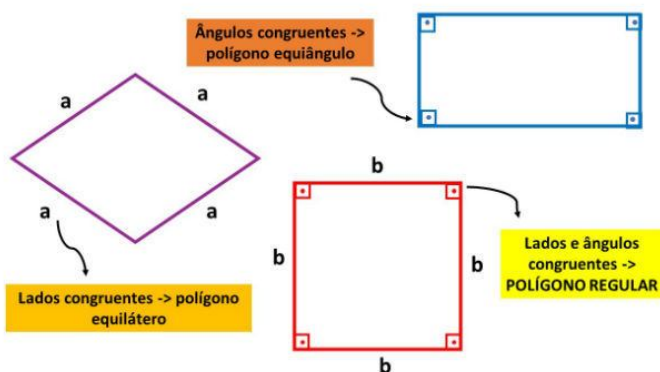
Os polígonos simples são chamados de convexos quando qualquer reta que une dois pontos, pertencente a região poligonal, ficará totalmente inserida nesta região. Já nos polígonos côncavos isso não acontece.



Polígonos regulares

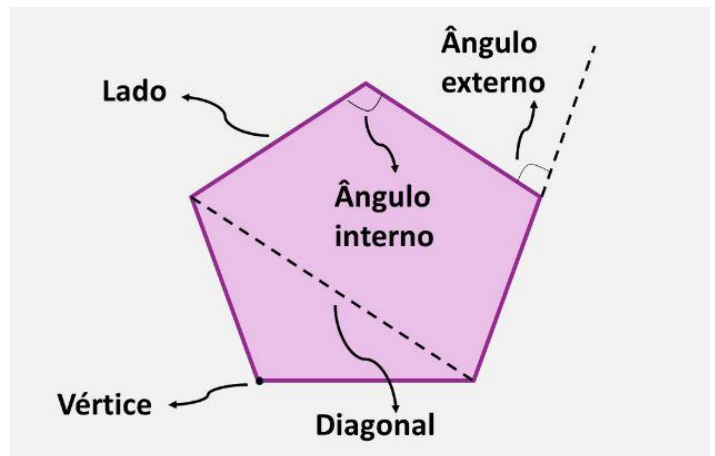
Quando um polígono apresenta todos os lados congruentes entre si, ou seja, possuem a mesma medida, ele é chamado de equilátero. Quando todos os ângulos têm mesma medida, ele é chamado de equiângulo.

Os polígonos convexos são regulares quando apresentam os lados e os ângulos congruentes, ou seja, são ao mesmo tempo equiláteros e equiângulos. Por exemplo, o quadrado é um polígono regular.



Elementos do Polígono

- **Vértice:** corresponde ao ponto de encontro dos segmentos que formam o polígono.
- **Lado:** corresponde a cada segmentos de reta que une vértices consecutivos.
- **Ângulos:** os **ângulos internos** correspondem aos ângulos formados por dois lados consecutivos. Por outro lado, os **ângulos externos** são os ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado sucessivo a ele.
- **Diagonal:** corresponde ao segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos, ou seja, um segmento de reta que passa pelo interior da figura.



Nomenclatura dos Polígonos

Dependendo do número de lados presentes, os polígono são classificados em:

Número de lados	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
20	Icoságono
30	Triacontágono
40	Tetracontágono
50	Pentacontágono
60	Hexacontágono
70	Heptacontágono
80	Octacontágono
90	Eneacontágono
100	Hectágono

Soma dos ângulos de um polígono

A soma dos ângulos externos dos polígonos convexos é sempre igual a 360°. Entretanto, para obter a soma dos ângulos internos de um polígono é necessário aplicar a seguinte fórmula:

$$S_i = (n-2) \cdot 180$$

Sendo:

n: número de lados do polígono

Número de diagonais

Para calcular o número de diagonais de um polígono, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Polígono Regular

- Ângulo interno
 $a_i = S_i / n$
- Ângulo externo
 $a_e = 360 / n$

SÉRIE AULA

1. Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

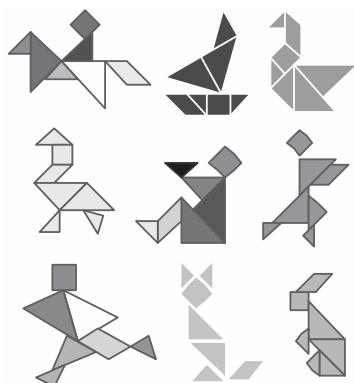
- a) 66
- b) 56
- c) 44
- d) 42

2. TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

O Tangram é um quebra-cabeça chinês. Há uma lenda sobre esse quebra-cabeça que afirma que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre, para uma longa viagem pelo mundo, recebeu uma tábua quadrada cortada em 7 peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos).

Assim o discípulo poderia reorganizá-las para registrar todas as belezas da viagem. Lendas e histórias como essa sempre cercam a origem de objetos ou fatos, a respeito da qual temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do Tangram. Se é ou não uma história verdadeira, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

<https://tinyurl.com/htszezzr> Acesso em: 03.03.2017. Adaptado.

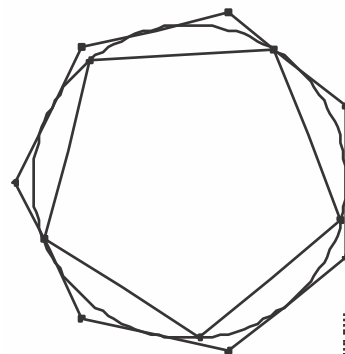


<https://tinyurl.com/gmcyas> Acesso em: 03.03.2017. Original do autor.

A partir das informações do texto, as peças do Tangram são

- a) sete polígonos côncavos.
- b) apenas triângulos isósceles.
- c) apenas quadriláteros regulares.
- d) dois trapézios e cinco triângulos.
- e) dois quadriláteros e cinco triângulos.

3. A figura a seguir mostra uma circunferência e dois polígonos. Um dos polígonos é inscrito nessa circunferência e outro, circunscrito a ela.



Se **M** é o número de diagonais do polígono inscrito e **N** é o número de diagonais do polígono circunscrito, a razão entre **M** e **N** é igual a

- a) $\frac{7}{5}$.
- b) $\frac{5}{7}$.
- c) $\frac{14}{5}$.
- d) $\frac{5}{14}$.

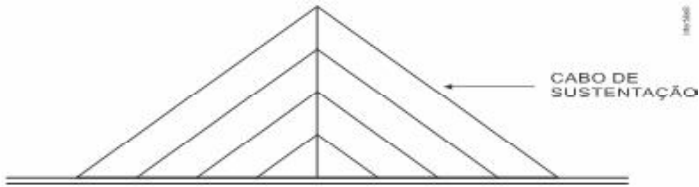
4. Somando-se todos os ângulos internos de três polígonos convexos obtém-se 2160° . Sabe-se que o número de lados desses polígonos é $n - 2$, n e $n + 2$. Dentre eles, o que possui menor número de lados é um

- a) triângulo.
- b) quadrilátero.
- c) pentágono.
- d) hexágono

5. Um engenheiro deseja projetar uma ponte estaiada para ligar duas cidades vizinhas. Ele precisa instalar 8 cabos de sustentação que ligam uma torre (vertical) à parte horizontal da ponte, e dispõe de 1.400 metros de cabo para isso. Os cabos devem ser fixados à mesma distância um do outro, tanto na torre quanto na parte horizontal. Assim, a distância da base da torre ao primeiro ponto de fixação vertical deve ser igual à distância entre dois

pontos de fixação vertical consecutivos. Essa mesma distância deve ser utilizada da base da torre ao primeiro ponto de fixação horizontal e entre os pontos de fixação horizontal consecutivos, conforme mostra a figura a seguir:

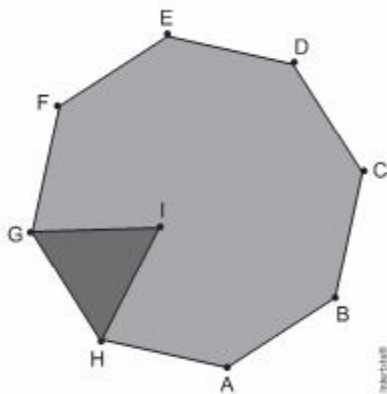
Utilize $\sqrt{2} \cong 1,41$



A distância, em metros, entre dois pontos consecutivos de fixação desses cabos deve ser aproximadamente de

- a) 49,5.
- b) 70,0.
- c) 98,5.
- d) 100,0.

6. (Enem PPL 2018) As Artes Marciais Mistas, tradução do inglês: MMA – *mixed martial arts* são realizadas num octógono regular. De acordo com a figura, em certo momento os dois lutadores estão respectivamente nas posições G e F, e o juiz está na posição I. O triângulo IGH é equilátero e $\widehat{GIF}$ é o ângulo formado pelas semirretas com origem na posição do juiz, respectivamente passando pelas posições de cada um dos lutadores.



A medida do ângulo $\widehat{GIF}$ é

- a) 120°
- b) 75°
- c) $67,5^\circ$
- d) 60°
- e) $52,5^\circ$

7. Se, em um polígono convexo, o número de lados n é um terço do número de diagonais, então o valor de n é

- a) 9.
- b) 11.
- c) 13.
- d) 15.

8. Atribui-se aos pitagóricos a ideia de números figurados. Esses números expressam configurações geométricas e representam um elo entre a geometria e a aritmética.

A tabela mostra alguns desses números e suas respectivas expressões algébricas gerais, em que n é um número natural diferente de zero.

Números figurados	Oblongos	Pentagonais	Hexagonais
Expressões algébricas gerais	$n(n+1)$	$\frac{n(3n-1)}{2}$	$2n^2 - n$

Fonte: Carl B. Boyer. História da matemática – Editora Edgard Blücher – 1974 (Adaptado)

Sabendo que para determinado valor de n , o número pentagonal correspondente possui 3 unidades a menos que o número hexagonal, então, o valor do número oblongo que corresponde ao dobro do valor de n é

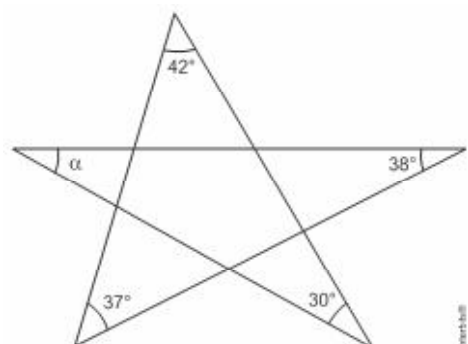
- a) 18.
- b) 26.
- c) 34.
- d) 42.

9. Uma bola de futebol é composta de 12 peças pentagonais e 20 peças hexagonais, com todas as arestas de mesmo comprimento. Suponha que, para o processo de costura de uma bola de futebol, sejam gastos 17 cm de linha para cada aresta da bola.

Quantos metros de linha serão necessários para costurar inteiramente 16 bolas com as características descritas?

- a) 153 m
- b) 15,3 m
- c) 24,48 m
- d) 244,8 m
- e) 306 m

10. Na figura a seguir, calcule o ângulo α .



Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.

- a) 30° .
- b) 33° .
- c) 37° .
- d) 38° .
- e) 42° .

Gabarito Série Aula

- 1. A
- 2. E
- 3. D
- 4. B
- 5. A
- 6. E
- 7. A
- 8. D
- 9. D
- 10. B

SÉRIE CASA

1. As formas geométricas aparecem em vários objetos do nosso cotidiano. Observe, na imagem abaixo, um relógio octogonal, objeto que fascina qualquer admirador de relógios.



Disponível em:
<<http://www.safirabrasilelloes.com.br/peca.asp?id=2928996>>
Acesso em: 04 out. 2017.

A soma das medidas dos ângulos internos de um octógono como o da imagem acima é

- a) 1.080° .
 - b) 900° .
 - c) 1.440° .
 - d) 360° .
 - e) 180° .
2. Um porta-retratos tem a forma de um octógono regular conforme imagem a seguir.



Disponível em: <Fonte: http://www.mauriciojasso.com/galeria/cache/lo-nuevo/DSC07649-Resolucion-de-Escritorio.JPG_595.jpg>. Acesso: 02 out. 2016.

A medida de cada ângulo interno desse octógono é

- a) 45° .
 - b) 60° .
 - c) 90° .
 - d) 135° .
 - e) 30° .
3. Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três que medem Y graus cada. O valor de Y é
- a) 135.
 - b) 150.
 - c) 120.
 - d) 60.
 - e) 30.

4. TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Para responder à(s) questão(ões), leia o seguinte texto:

A palavra polígono tem origem no grego e significa ter muitos lados ou ângulos. Eles foram estudados pelo grande Geômetra Euclides de Alexandria em sua obra *Os elementos*.

Quantos lados têm um polígono cuja soma dos ângulos internos e externos é 1980° ?

- a) 8
 - b) 11
 - c) 13
 - d) 17
5. Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano.
- A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.

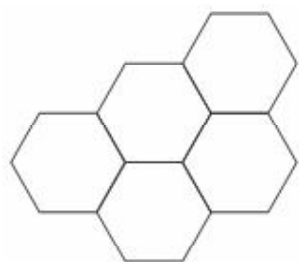


Figura 1

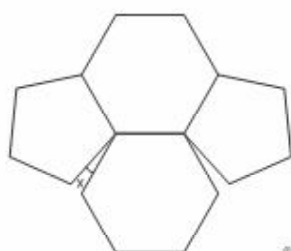
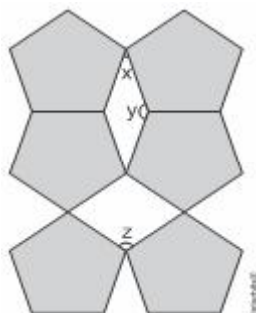


Figura 2

Na Figura 2, a medida do ângulo é igual a x

- a) 14° .
- b) 12° .
- c) 10° .
- d) 8° .

6. O mosaico a seguir é formado por pentágonos regulares e losangos.



A soma das medidas dos ângulos x , y e z é igual a

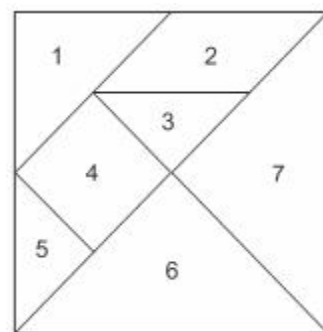
- a) 252° .
- b) 288° .
- c) 324° .
- d) 360° .

7. Uma pessoa pegou um mapa rasgado em que constava um terreno delimitado por quatro ruas. Na parte visível do mapa, vê-se que o ângulo formado pela rua Saturno e pela rua Júpiter é 90° ; o ângulo formado pela rua Júpiter e pela rua Netuno é 110° e o ângulo formado pela rua Netuno e pela rua Marte é 100° . Nessas condições, a medida de um ângulo formado pelas ruas Marte e Saturno, na parte rasgada do mapa, é de



- a) 50° .
- b) 60° .
- c) 70° .
- d) 80° .
- e) 90° .

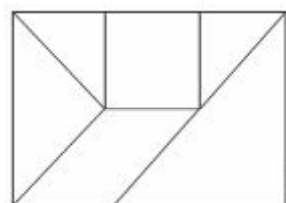
8. O *Tangram* é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças com as quais podemos formar várias figuras, utilizando todas as peças e sem sobrepor-las.



Legenda:

- Fig. 1 – Triângulo médio
- Fig. 2 – Paralelogramo
- Fig. 3 e 5 – Triângulos pequenos
- Fig. 4 – Quadrado
- Fig. 6 e 7 – Triângulos grandes

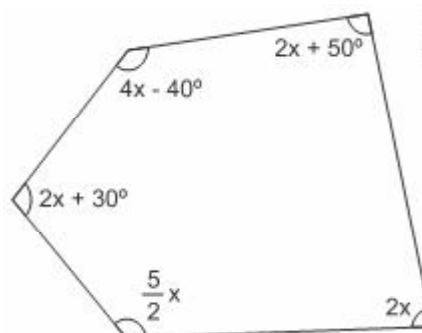
O retângulo a seguir foi formado com seis dessas sete peças.



A peça que não foi utilizada é idêntica à de número

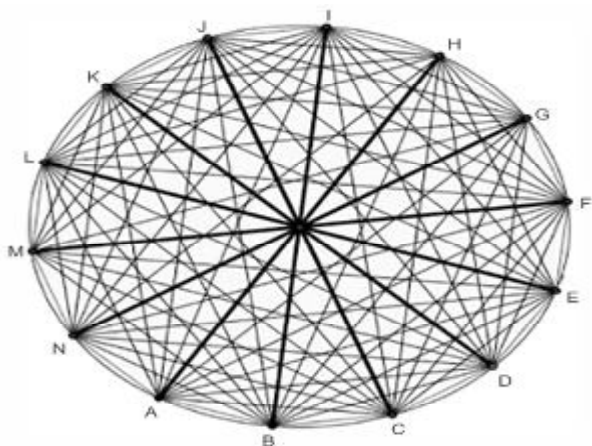
- a) 1.
- b) 3.
- c) 5.
- d) 7.

9. O valor de x no pentágono abaixo é igual a:



- a) 25° .
- b) 40° .
- c) 250° .
- d) 540° .
- e) 1.000° .

10. A figura a seguir mostra um polígono regular de 14 lados e todas as suas diagonais:



Fonte: <https://clickexatas.wordpress.com>. Acessado em 12/10/2015

O número de diagonais traçadas é de

- a) 77.
- b) 79.
- c) 80.
- d) 98.

11. Se a partir de cada um dos vértices de um polígono convexo com n lados podemos traçar tantas diagonais quanto o total das diagonais de um hexágono convexo, então, o valor de n é

- a) 9.
- b) 10.
- c) 11.
- d) 12.

12. A arte e a arquitetura islâmica apresentam os mais variados e complexos padrões geométricos. Na Mesquita de Córdoba, na Espanha, podemos encontrar um dos mais belos exemplos dessa arte. O esquema geométrico da figura 1 é um dos muitos detalhes dessa magnífica obra.

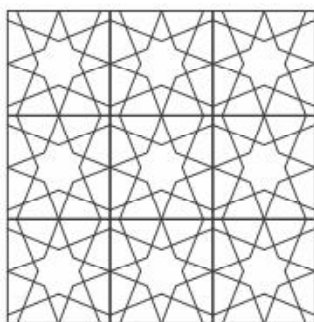
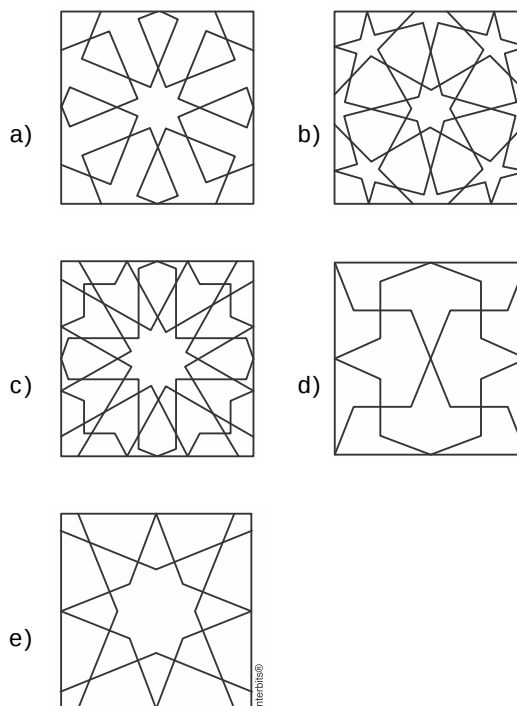


Figura 1
(fonte das figuras desta
questão: BROUG, Eric. *Islamic
Geometric Patterns*. Londres,
Thames & Hudson, 2008.
Adaptado)

Assinale a alternativa que apresenta o padrão geométrico cuja repetição compõe a figura 1.



13. Observe as duas figuras abaixo:

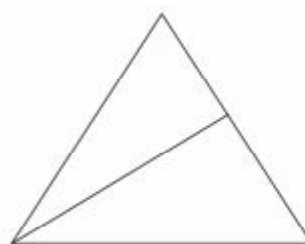


Figura 1

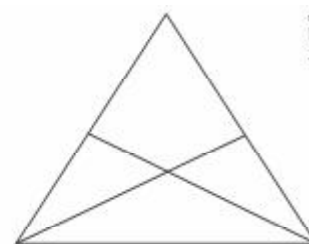


Figura 2

Dado que a figura 1 possui 3 triângulos, quantos triângulos possui a figura 2?

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 10
- e) 12

14. A melhor maneira de alocarmos pontos igualmente espaçados em um círculo é escrevê-los nos vértices de polígonos regulares, conforme a figura a seguir exemplifica com 6 pontos.



Para alocarmos 36 pontos igualmente espaçados em um círculo de raio 1, a distância mínima entre eles deve ser aproximadamente

Use $\sin(5^\circ) = 0,08$

- a) 0,12
- b) 0,11
- c) 0,16
- d) 0,14
- e) 0,19

15. (Enem 2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

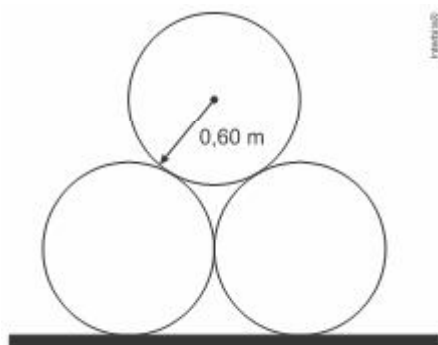
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com.
Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



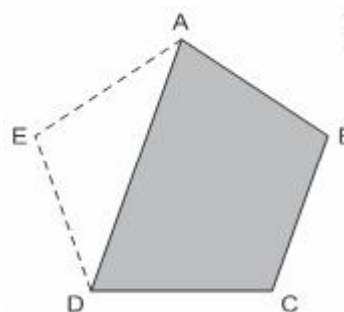
A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- a) 2,82
- b) 3,52
- c) 3,70
- d) 4,02
- e) 4,20

16. (Enem PPL 2016) Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.

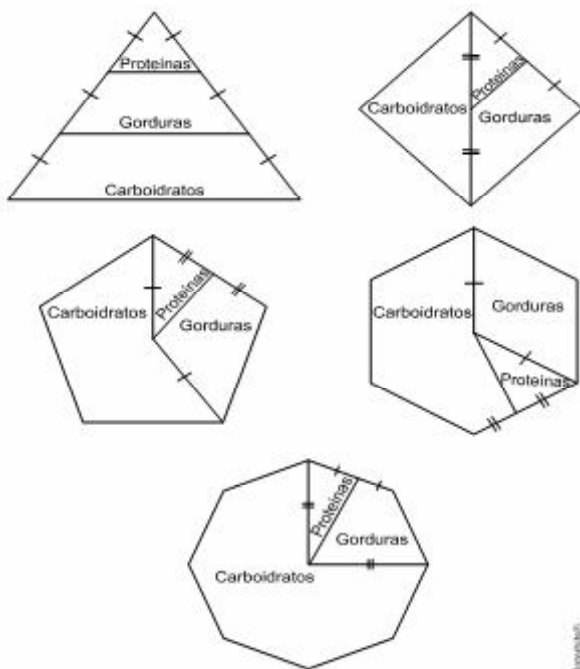


Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = \widehat{EAD}$, $y = \widehat{EDA}$ e $z = \widehat{AED}$ do triângulo ADE.

As medidas x , y e z , em graus, desses ângulos são, respectivamente,

- a) 18, 18 e 108.
- b) 24, 48 e 108.
- c) 36, 36 e 108.
- d) 54, 54 e 72.
- e) 60, 60 e 60.

17. Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

- triângulo.
- losango.
- pentágono.
- hexágono.
- octógono.

18. (Enem 2ª aplicação 2014) Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.

Duas formas geométricas que fazem parte de P são

- triângulo e pentágono.
- triângulo e hexágono.
- triângulo e octógono.
- hexágono e heptágono.
- hexágono e octógono.

19. (Enem 2012) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estatua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

- $R \geq L/\sqrt{2}$
- $R \geq 2L/\pi$
- $R \geq L/\sqrt{\pi}$
- $R \geq L/2$
- $R \geq L/(2\sqrt{2})$

20. (Enem 2002) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

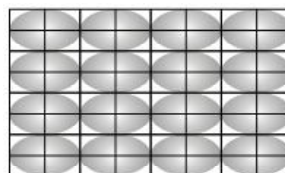


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano



Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octágono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

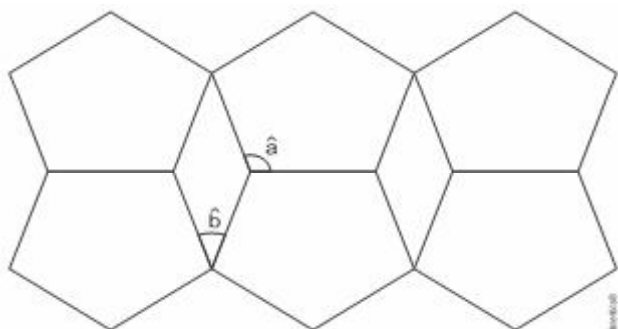
- triângulo.
- quadrado.
- pentágono.
- hexágono.
- eneágono.

Gabarito Série Casa

- | | |
|-------|-------|
| 1. A | 11. D |
| 2. D | 12. E |
| 3. B | 13. C |
| 4. B | 14. C |
| 5. B | 15. D |
| 6. B | 16. C |
| 7. B | 17. C |
| 8. D | 18. B |
| 9. B | 19. A |
| 10. A | 20. B |

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

1. (G1 - epcar (Cpcar) 2021) Para participar de um concurso no qual serão escolhidos mosaicos para a calçada de uma igreja, um artista construiu seu mosaico usando pentágonos regulares e losangos dispostos conforme figura a seguir:



Sabe-se que $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos do pentágono regular e do losango, respectivamente.

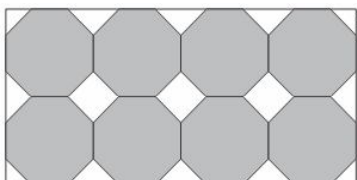
Se a soma $\hat{a} + \hat{b}$ equivale a x graus, então, quanto ao valor de x pode-se afirmar que é um número

- primo.
- quadrado perfeito.
- divisível por 7.
- múltiplo de 10.

2. (Enem 2020) Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

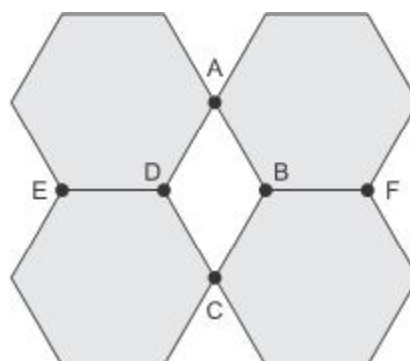
- Triângulo retângulo isósceles;
- Triângulo equilátero;
- Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

- 1.
- 3.
- 1 e 2.
- 1 e 3.
- 2 e 3.

3. (Ufrgs 2019 - Adaptada) Os quatro hexágonos da imagem a seguir são regulares e cada um tem área de 72 cm^2 .

Os vértices do quadrilátero ABCD coincidem com vértices dos hexágonos. Os pontos E, D, B e F são colineares.



A área do quadrilátero ABCD, em cm^2 , é

- 8.
- 10.
- 16
- 24.
- 36.

4. (Uece 2019) Considere MXYZW um pentágono regular e XOY um triângulo equilátero em seu interior (o vértice O está no interior do pentágono). Nessas condições, a medida, em graus, do ângulo $\widehat{XOZ}$ é

- 116.
- 96.
- 126.
- 106.

Gabarito:

1. B
2. D
3. D
4. C

RASCUNHO

ACERTE!

Cursos para o ENEM e Vestibulares



www.acertecursosgv.com

 [@acerte.cursos.gv](https://www.instagram.com/acerte.cursos.gv)

 [Acerte Matemática e Física](#)



SALINHA
DE MATEMÁTICA
DO GUGUINHA