

ACERTE!

Cursos para o ENEM e Vestibulares



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA PLANA E FUNÇÕES



SALINHA
DE MATEMÁTICA
DO GUGUINHA

AULA 8

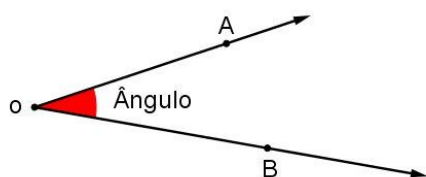
ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

1. ÂNGULOS

O estudo dos **ângulos** é fundamental para compreender conceitos ligados a geometria, trigonometria, entre outros ramos da Matemática. O estudo dos ângulos é um dos responsáveis pelos avanços que possuímos atualmente em vários ramos, como a navegação e a astronomia. Um exemplo notável é o astrolábio náutico (inventado pelo grego Hiparco) usado para medir ângulos. Nos séculos V e VI, os navegadores construíram esse instrumento para medir a elevação das estrelas e do sol com o intuito de localizar suas embarcações. Mais tarde, o astrolábio deu origem ao sextante, mais simplificado, mas que cumpria a mesma função.

DEFINIÇÃO DE ÂNGULO

Chama-se ângulo a região entre duas semi-retas que partem de uma mesma origem. Podemos dizer, ainda que um ângulo é a medida da abertura de duas semi-retas que partem da mesma origem.



Indica-se: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou $\hat{O}$.

O ponto "O" é o vértice do ângulo e as semi-retas OA e OB são os lados do ângulo.

Ângulos consecutivos

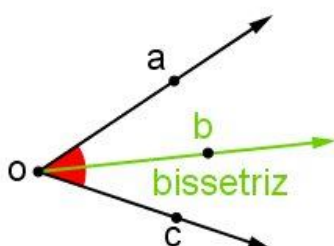
Dois ângulos são consecutivos se eles compartilham um mesmo lado, ou seja, se o lado de um, for também o mesmo lado do outro.

Ângulos adjacentes

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não compartilham pontos internos, ou seja, não estão sobrepostos um ou outro.

Bissetriz de um ângulo

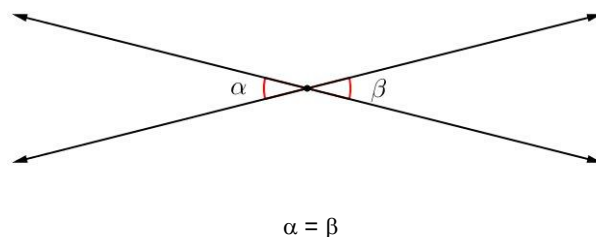
A bissetriz de um ângulo é a semi-reta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes (iguais).



Formalmente falando, uma semi-reta ob interna ao ângulo $a\hat{O}c$, é bissetriz desse ângulo se, e somente se, $a\hat{O}b \cong b\hat{O}c$.

Ângulos opostos pelo vértice

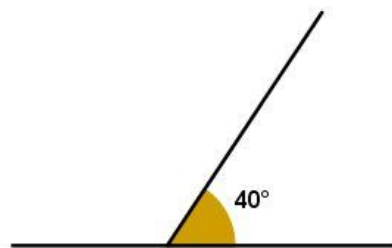
Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice se as semi-retas que os formam partem do mesmo vértice e são opostas aos lados do outro.



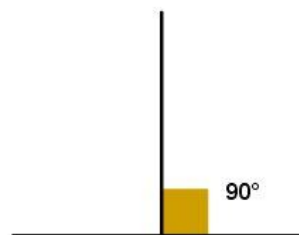
Classificação de ângulos

Os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua medida.

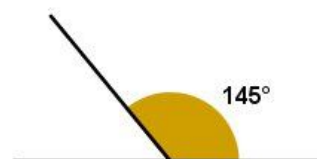
Ângulo agudo: ângulo com medida menor que 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).



Ângulo reto: ângulo com medida igual a 90° .



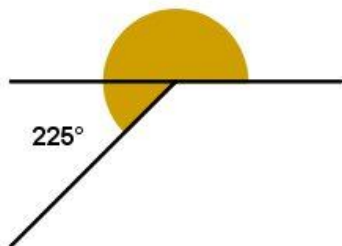
Ângulo obtuso: ângulo com medida maior que 90° ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).



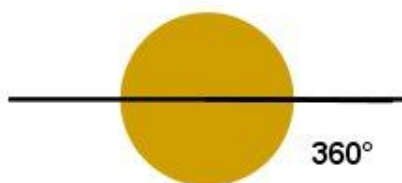
Ângulo raso: ângulo com medida igual a 0° ou 180° .



Ângulo Côncavo: ângulo com medida entre 180° e 360° .

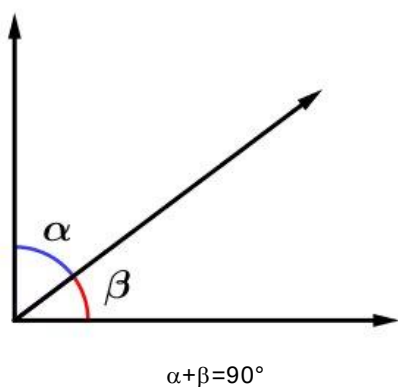


Ângulo completo ou de uma volta: ângulo com medida igual a 360° .



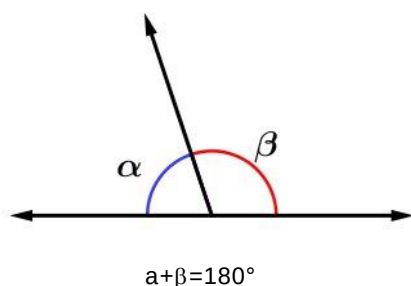
Ângulos complementares

Dizemos que dois ângulos são complementares quando a sua soma equivale a 90° .



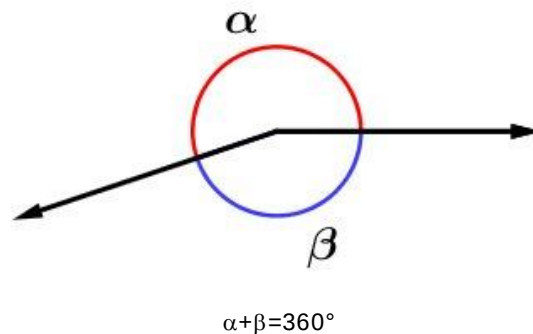
Ângulos suplementares

Dizemos que dois ângulos são suplementares se, e somente se, a sua soma for igual a 180° .



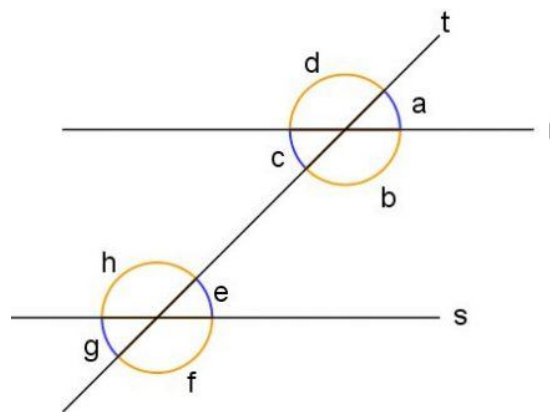
Ângulos replementares

Dois ângulos são replementares quando a sua soma for igual a 360° .



Retas paralelas cortadas por uma transversal

Duas retas paralelas e distintas, r e s , cortadas por uma outra reta transversal t delimitam oito ângulos, como na figura. Esses ângulos serão suplementares ou congruentes.



Nesses casos, podemos atribuir alguns nomes especiais, veja:

Correspondentes:
$$\begin{cases} a = e \\ b = f \\ d = h \\ c = g \end{cases}$$

Alternos:
$$\begin{cases} \text{internos:} & \begin{cases} b = h \\ c = e \end{cases} \\ \text{externos:} & \begin{cases} a = g \\ d = f \end{cases} \end{cases}$$

Colaterais:
$$\begin{cases} \text{internos:} & \begin{cases} b + e = 180^\circ \\ c + h = 180^\circ \end{cases} \\ \text{externos:} & \begin{cases} a + f = 180^\circ \\ d + g = 180^\circ \end{cases} \end{cases}$$

2. TRIÂNGULOS

Triângulos são figuras geométricas que possuem três lados. São polígonos e, por isso, herdam as características e propriedades deles.

Elementos de um triângulo

Os triângulos possuem os mesmos elementos dos polígonos, com exceção das diagonais. Os outros elementos dos polígonos que os triângulos possuem são:

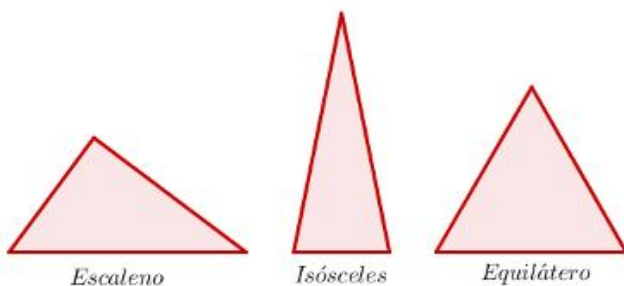
- **Lados:** são os segmentos de reta que formam o polígono;
- **Vértices:** são os pontos de encontro entre os lados;
- **Ângulos internos:** são os ângulos que podem ser observados entre dois lados adjacentes de um **triângulo**;
- **Ângulos externos:** são os ângulos que podem ser observados entre um lado de um **triângulo** e o prolongamento do lado adjacente a ele.



Classificações de triângulos

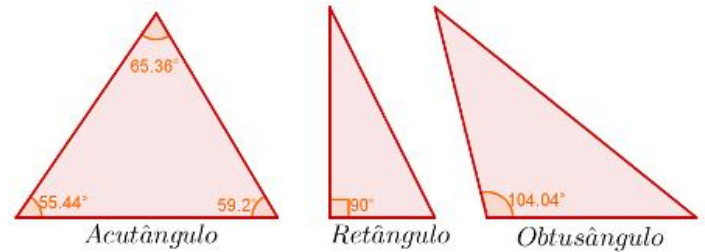
Os triângulos podem ser classificados a partir de seu número de lados. Obrigatoriamente, um triângulo pertence a uma das classificações a seguir:

- **Escaleno:** triângulo que possui todos os lados com medidas diferentes;
- **Isósceles:** triângulo que possui dois lados com medidas iguais;
- **Equilátero:** triângulo que possui três lados com medidas iguais.



Outra classificação possível para os **triângulos** refere-se às medidas de seus ângulos. Veja:

- **Acutângulo:** Triângulo que possui todos os ângulos com medidas menores que 90° ;
- **Retângulo:** Triângulo que possui um ângulo com medida igual a 90° ;
- **Obtusângulo:** Triângulo que possui um ângulo com medida superior a 90° .



Propriedades dos triângulos

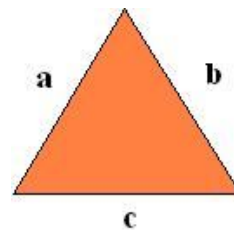
As propriedades a seguir são válidas para qualquer triângulo, independentemente de sua forma ou tamanho.

- A soma das medidas dos ângulos internos de um **triângulo** sempre será igual a 180° ;
- A soma das medidas dos ângulos externos de um **triângulo** sempre será igual a 360° ;
- A medida de um ângulo externo de um **triângulo** é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele;
- A soma das medidas de dois lados de um **triângulo** é sempre maior que a medida do terceiro lado;
- O maior lado de um **triângulo** opõe-se ao seu maior ângulo;
- O menor lado de um **triângulo** opõe-se ao seu menor ângulo.

Condição de Existência de um Triângulo

Para construir um triângulo não podemos utilizar qualquer medida, tem que seguir a condição de existência:

Para construir um triângulo é necessário que a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas.



$$\begin{aligned} |b - c| &< a < b + c \\ |a - c| &< b < a + c \\ |a - b| &< c < a + b \end{aligned}$$

SÉRIE AULA

- Ângulos

1. Sejam dois ângulos x e y tais que $(2x)$ e $(y+10^\circ)$ são ângulos complementares e $(5x)$ e $(3y-40^\circ)$ são suplementares.

O ângulo x mede

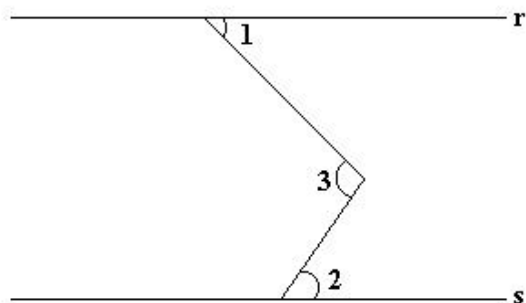
- a) 5° .
- b) 10° .
- c) 15° .
- d) 20° .

2. Duas retas paralelas " r " e " s ", cortadas por uma transversal " t ", formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20° .

O ângulo colateral interno agudo mede

- a) 20°
- b) 35°
- c) 55°
- d) 80°

3. Na figura adiante, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55° . A medida, em graus, do ângulo 3 é:



- a) 50
- b) 55
- c) 60
- d) 80
- e) 100

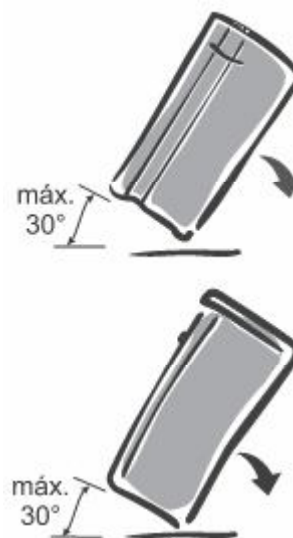
4. O ângulo cujo suplemento excede de 6° o quádruplo do seu complemento, é:

- a) 58°
- b) 60°
- c) 62°
- d) 64°
- e) 68°

5. Considere θ e α dois ângulos adjacentes e complementares. A expressão que determina o valor do ângulo formado pelas bissetrizes de θ e α é

- a) $\frac{\theta + \alpha}{2}$.
- b) $\frac{\theta + \alpha}{4}$.
- c) $\frac{90 - (\theta + \alpha)}{2}$.
- d) $\frac{90 - (\theta + \alpha)}{4}$.

6. Analisando o manual de instruções do refrigerador RDE30, observamos um destaque para o momento de transportá-lo. Observe abaixo o trecho desse manual sobre transporte do refrigerador.



Transporte

Caso necessite transportar seu Refrigerador em pequenos deslocamentos, incline-o para trás ou para um dos lados com ângulo máximo de 30° . Caso necessite transportar seu Refrigerador em longos deslocamentos (ex.: mudança), movimente-o em pé.

Disponível em: <<https://www.colombo.com.br/produtos/111120/111120.pdf?descricao=...>>.

Acesso: 02 out.2016.

Sabendo que o ângulo máximo de inclinação do refrigerador é 30° , a metade do suplemento desse ângulo é de

- a) 60° .
- b) 75° .
- c) 45° .
- d) 30° .
- e) 15° .

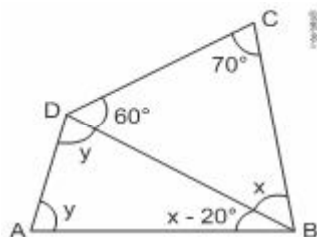
Gabarito Ângulos

- 1. D
- 2. D
- 3. E
- 4. C
- 5. A
- 6. B

SÉRIE AULA

- Triângulos

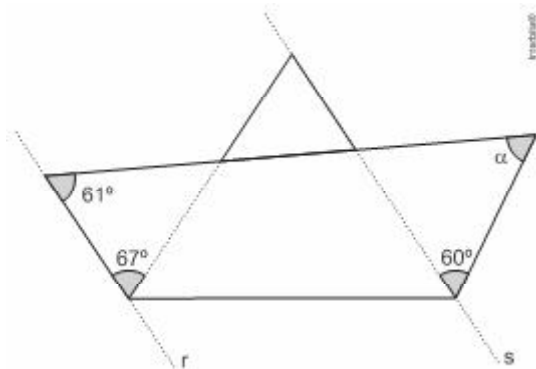
1.



No quadrilátero ABCD, o valor de $y - x$ é igual a

- a) $2x$
- b) $2y$
- c) $\frac{x}{2}$
- d) $\frac{y}{2}$

2. Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s , são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



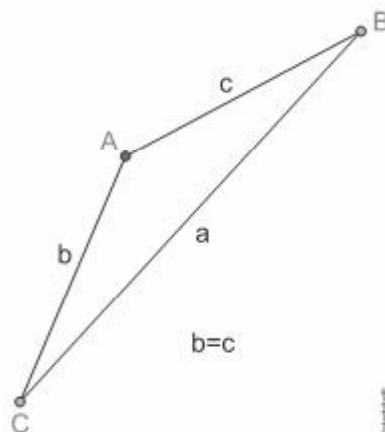
- a) 52° .
- b) 60° .
- c) 61° .
- d) 67° .
- e) 59° .

3. Em um triângulo ABC, $\widehat{BAC}$ é o maior ângulo e $\widehat{ACB}$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $\widehat{BAC}$ é 70° maior que a medida de $\widehat{ACB}$. A medida de $\widehat{BAC}$ é o dobro da medida de $\widehat{ABC}$.

Portanto, as medidas dos ângulos são

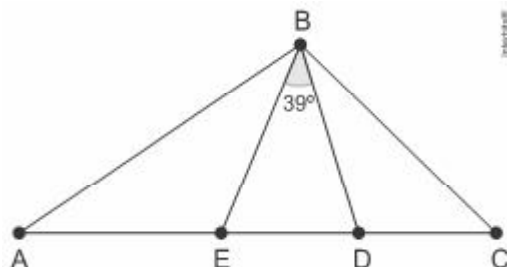
- a) $20^\circ, 70^\circ$ e 90° .
- b) $20^\circ, 60^\circ$ e 100° .
- c) $10^\circ, 70^\circ$ e 100° .
- d) $30^\circ, 50^\circ$ e 100° .
- e) $30^\circ, 60^\circ$ e 90° .

4. Considerando um triângulo isósceles com perímetro de 70m, cujo lado maior mede 50% a mais que a medida de um dos lados homólogos, é CORRETO afirmar que o lado maior mede:



- a) 10m
- b) 20m
- c) 30m
- d) 25m
- e) 18m

5. A figura representa um triângulo ABC, com E e D sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que $AB = AD$, $CB = CE$ e que $\widehat{EBD}$ mede 39° .



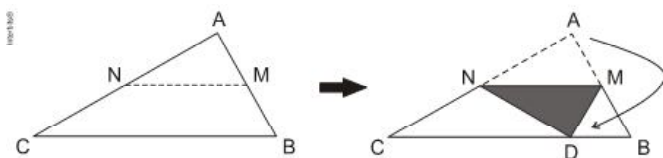
Nas condições dadas, a medida de $\widehat{ABC}$ é

- a) 102°
- b) 108°
- c) 111°
- d) 115°
- e) 117°

6. No plano, seja $XYZW$ um quadrado e E um ponto exterior a esse quadrado tal que o triângulo YZE seja equilátero. Assim, é correto afirmar que a medida do ângulo $X\hat{E}W$ é

- a) 45° .
- b) 40° .
- c) 35° .
- d) 30° .

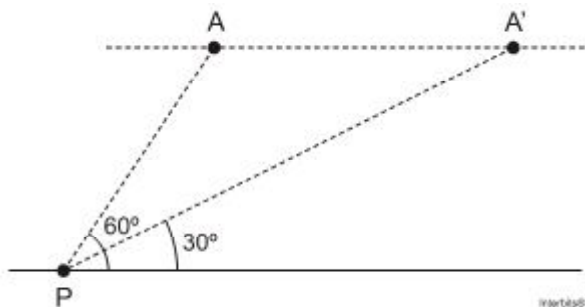
7. (Enem PPL 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC , e D , ponto do lado BC , indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC .



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

- a) CMA e CMB .
- b) CAD e ADB .
- c) NAM e NDM .
- d) CND e DMB .
- e) CND e NDM .

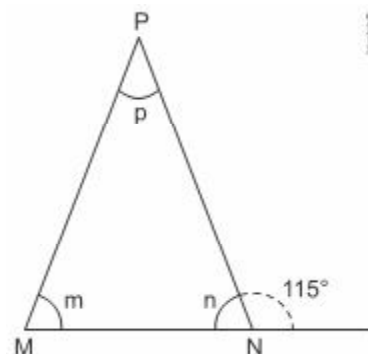
8. Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P , no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30° , conforme mostra a figura abaixo.



A velocidade desse avião era de:

- a) 180 km/h
- b) 240 km/h
- c) 120 km/h
- d) 150 km/h
- e) 200 km/h

9.

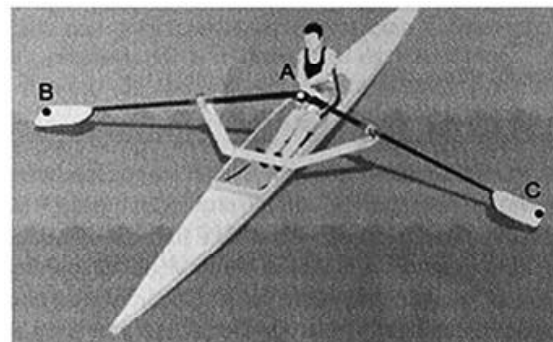


O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

- a) $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$
- b) $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$
- c) $65^\circ, 50^\circ, 65^\circ$
- d) $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$
- e) $80^\circ, 80^\circ, 40^\circ$

10. (Enem 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



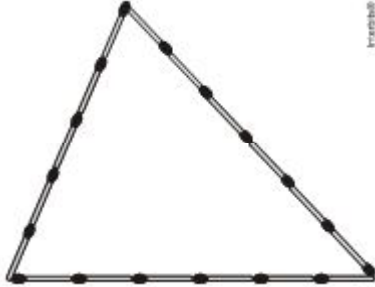
Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C . Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de 170° .

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C , no momento em que o remador está nessa posição, é

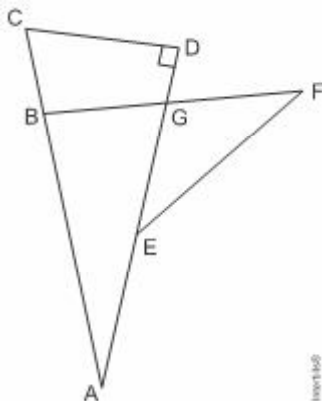
- a) retângulo escaleno.
- b) acutângulo escaleno.
- c) acutângulo isósceles.
- d) obtusângulo escaleno.
- e) obtusângulo isósceles.

11. (ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

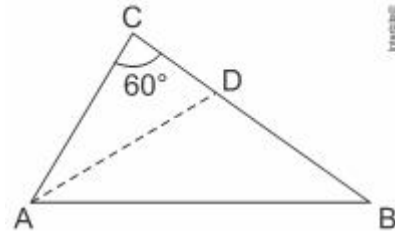


A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

- a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.
12. Na figura abaixo, o triângulo ACD é retângulo em D e o triângulo EFG é isósceles de base $\overline{EF}$. Sabendo que os ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{GEF}$ são, respectivamente, de 32° e 25° , determine o valor do ângulo $\widehat{CBG}$.



- a) 25°
b) 58°
c) 82°
d) 89°
13. (Unicamp 2019) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A , e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a

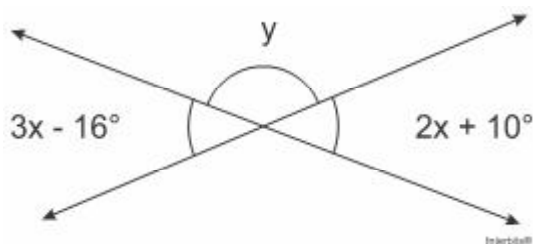
- a) 60° .
b) 70° .
c) 80° .
d) 90° .
14. (Efomm 2018) Num triângulo ABC , as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50° . Calcule o ângulo interno do vértice A .
- a) 110°
b) 90°
c) 80°
d) 50°
e) 20°

Gabarito Triângulos

1. C
2. E
3. D
4. C
5. A
6. D
7. D
8. B
9. A
10. E
11. A
12. C
13. C
14. C

SÉRIE CASA

1. A medida do ângulo Y na figura é:



- a) 62°
b) 72°
c) 108°
d) 118°
e) 154°

2. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15^\circ$ e $\hat{B} = 5x - 9^\circ$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x .

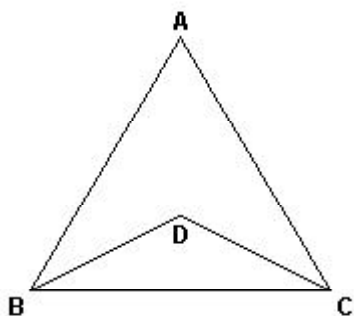
- a) 2°
b) 8°
c) 12°
d) 24°

3. As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x+1$, $3x$ e $x+3$ estão em PA, nessa ordem.

O perímetro do triângulo mede

- a) 4
b) 9
c) 14
d) 19

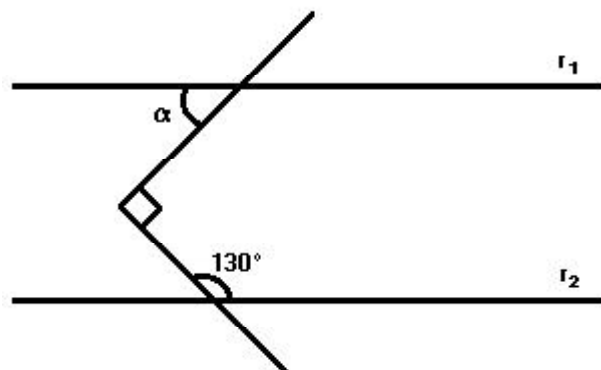
4. Na figura a seguir, $AB = AC$, D é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo BDC é o triplo do ângulo A .



Então, a medida do ângulo B é

- a) 54°
b) 60°
c) 72°
d) 84°

5. As retas r_1 e r_2 são paralelas. O valor do ângulo α , apresentado na figura a seguir, é:

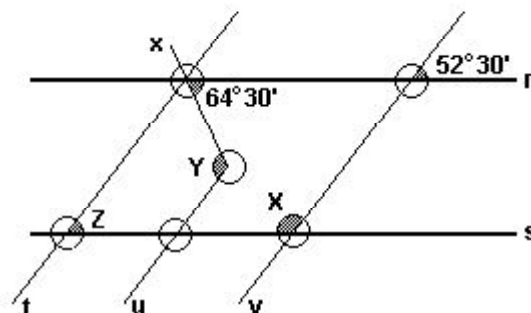


- a) 40°
b) 45°
c) 50°
d) 65°
e) 130°

6. Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos agudos formados vale 72° . Então, qualquer dos ângulos obtusos formados mede:

- a) 142° .
b) 144° .
c) 148° .
d) 150° .
e) 152° .

7. Na figura a seguir temos $r//s$ e $t//u//v$.



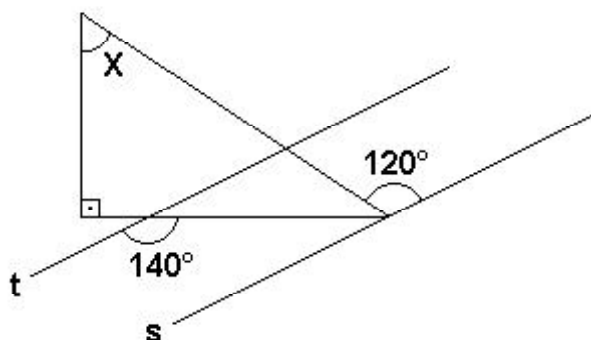
Com base nos estudos dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal pode-se afirmar que:

- I) O ângulo X mede $127^{\circ} 30'$.
- II) O ângulo Y mede 117° .
- III) O ângulo Z mede $64^{\circ} 30'$.

Analise as proposições acima e assinale a alternativa correta.

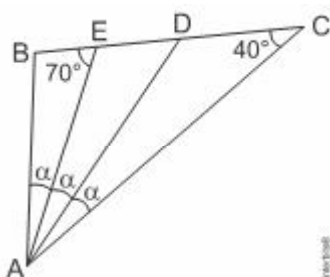
- a) Somente as afirmações I e II estão corretas.
- b) Somente as afirmações I e III estão corretas.
- c) Somente a afirmação I está correta.
- d) As afirmações I, II e III estão corretas.
- e) As afirmações I, II e III estão incorretas.

8. As retas t e s são paralelas. A medida do ângulo x , em graus, é



- a) 30
- b) 40
- c) 50
- d) 60
- e) 70

9.



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

- a) 10°
- b) 15°
- c) 20°
- d) 25°

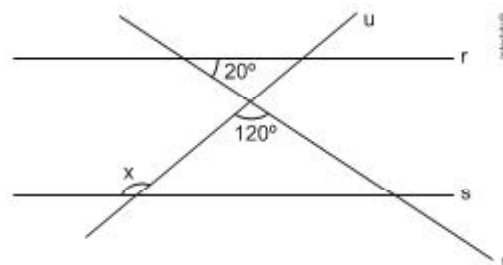
10. Os ângulos internos de um triângulo têm medidas diretamente proporcionais a 1, 2 e 6. É possível destacar dois ângulos **externos** desse triângulo cuja soma, em graus, mede

- a) 260.
- b) 180.
- c) 280.
- d) 200.
- e) 120.

11. Um triângulo isósceles tem dois lados congruentes (de medidas iguais) e o outro lado é chamado de base. Se em um triângulo isósceles o ângulo externo relativo ao vértice oposto da base mede 130° , então os ângulos internos deste triângulo medem:

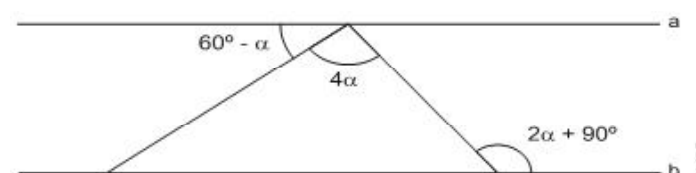
- a) 10° , 40° e 130° .
- b) 25° , 25° e 130° .
- c) 50° , 60° e 70° .
- d) 60° , 60° e 60° .
- e) 50° , 65° e 65° .

12. Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t , duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo". Portanto, o valor de x é:



- a) 120°
- b) 125°
- c) 130°
- d) 135°
- e) 140°

13. Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



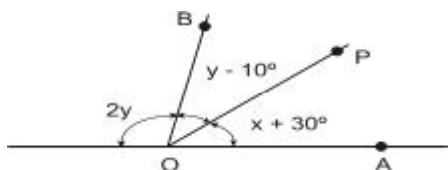
A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

- a) um número primo maior que 23.
- b) um número ímpar.
- c) um múltiplo de 4.
- d) um divisor de 60.
- e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

14. As medidas dos ângulos de um triângulo são, respectivamente, x , $8x$ e $9x$. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta o valor de x .

- a) 7.
- b) 8,5.
- c) 10.
- d) 11,8.
- e) 12.

15. Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor de x e y .



- a) $x = 13$ e $y = 49$
- b) $x = 15$ e $y = 35$
- c) $x = 12$ e $y = 48$
- d) $x = 17$ e $y = 42$
- e) $x = 10$ e $y = 50$

16. (Enem 2009) Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas Capitais



SIQUEIRA, S. *Brasil Regiões*. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

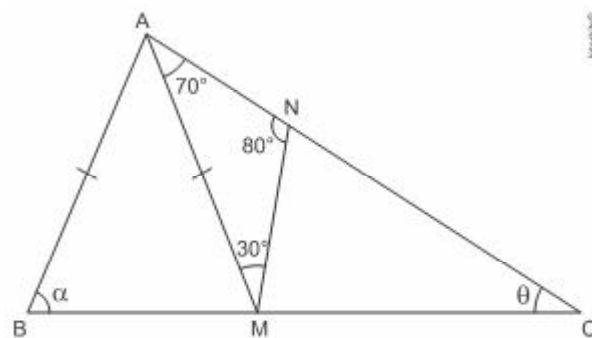
Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AI , que seguiu a direção que forma um ângulo de 135° graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião $AIII$, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AI ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

- a) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.
- b) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.
- c) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.
- d) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.
- e) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

17. Num triângulo isósceles, cada ângulo da base mede o dobro da medida do ângulo do vértice. A medida do ângulo do vértice é:

- a) 36° .
- b) 72° .
- c) 50° .
- d) 40° .
- e) 80° .

18. Neste triângulo, tem-se $\overline{AB} = \overline{AM}$, $M\hat{A}N = 70^\circ$, $A\hat{M}N = 30^\circ$ e $A\hat{N}M = 80^\circ$.



O valor de $\alpha - \theta$ é

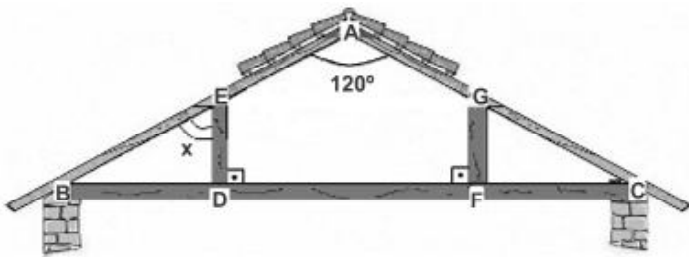
- a) 50° .
- b) 60° .
- c) 70° .
- d) 80° .

19. O perímetro de um triângulo é de 36 dm. As medidas são expressas por três números inteiros e consecutivos. Assinale a alternativa que apresenta quanto mede o **menor** lado do triângulo.

- a) 9 dm.
- b) 10 dm.
- c) 11 dm.
- d) 12 dm.
- e) 13 dm.

20. O projeto de madeiramento é fundamental para a construção de um bom telhado em uma residência.

Na figura, temos a vista frontal do madeiramento de um telhado. O triângulo ABC é isósceles de base BC tal que $\hat{A} = 120^\circ$. Observa-se também que os segmentos DE e FG são perpendiculares à base BC .



De acordo com os dados acima, a medida do ângulo é $BÊD$ é

- a) 30°
- b) 45°
- c) 60°
- d) 75°

GABARITO SÉRIE CASA

1. D
2. B
3. B
4. C
5. A
6. B
7. A
8. E
9. B
10. D
11. E
12. E
13. D
14. C
15. E
16. B
17. A
18. C
19. C
20. C

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

ACERTE!

Cursos para o ENEM e Vestibulares



www.acertecursosgv.com

 [@acerte.cursos.gv](https://www.instagram.com/acerte.cursos.gv)

 Acerte Matemática e Física



SALINHA
DE MATEMÁTICA
DO GUGUINHA